

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВОЛАТИЛЬНОСТИ ИНДЕКСОВ ФОНДОВОГО РЫНКА США С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ GARCH И ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ОЦЕНОК ВОЛАТИЛЬНОСТИ

© 2022 **Гайомей Джон**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия, Санкт-Петербург
E-mail: gayomey@hotmail.com

© 2022 **Зайцев Андрей Александрович**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Россия, Санкт-Петербург
E-mail: andrey_z7@mail.ru

В статье выполнена оценка способности моделей GARCH и высокочастотных оценщиков волатильности прогнозировать волатильность условной доходности для S&P500, Nasdaq composite index и Dow Jones Industrial Average. С этой целью проведено сравнение прогнозов волатильности для этих индексов в рамках GARCH и реализованных подходов к волатильности с прогнозом индекса волатильности СВОЕ. Полученные данные позволили сделать вывод о том, что модели GARCH и высокочастотные оценки волатильности дают точный прогноз волатильности для фондового рынка США, однако высокочастотные оценки волатильности предпочтительнее для Nasdaq Composite index и Dow Jones Industrial Average, в то время как модели GARCH больше подходят для индекса S&P500.

Ключевые слова: Волатильность условной доходности, реализованная волатильность, реализованные меры, HAR-RV, GARCH

Введение

Ключевой проблемой финансовой эконометрики является моделирование, оценка и прогнозирование волатильности и корреляции условной доходности. Наличие точных моделей прогнозирования условной волатильности и корреляции важно для точного ценообразования производных финансовых инструментов, управления рисками и принятия решений о распределении активов [32]. Как основной показатель риска в финансах, волатильность важна при определении оптимальных портфелей, ценообразовании и хеджировании производных финансовых инструментов, определении подверженности фирмы различным факторам риска и компенсации, которую она может рассчитывать получить от этих рисков. Волатильность также важна в поиске торговых и инвестиционных возможностей, которые гарантируют привлекательный компромисс между риском и доходностью [5]. В связи с этим были предприняты значительные усилия для обеспечения хорошей оценки и прогноза текущей и будущей волатильности в реальном времени.

Хорошо известно, что условная волатильность и корреляция очень предсказуемы. Однако неотъемлемая проблема моделирования

и прогнозирования волатильности заключается в том, что волатильность не наблюдаема, что подразумевает, что моделирование должно быть косвенным. Часто используемый подход к решению проблемы задержки волатильности доходности заключается в том, чтобы сделать вывод о волатильности на основе сильных параметрических допущений, используя, например, модель ARCH-GARCH или стохастической волатильности. В этих моделях волатильность обычно извлекается из ежедневных квадратов доходности [6].

В последние годы литература по волатильности выиграла от наличия высокочастотных данных (то есть наблюдений, отобранных на временном горизонте, меньшем, чем торговый день, например, 1 минута, 1 секунда или даже данные по тикам). В результате подход к измерению и моделированию волатильности существенно изменился. Был предложен новый метод, называемый «Реализованной дисперсией» или «Реализованной волатильностью», который использует информацию в высокочастотных доходностях. Этот подход оценивает волатильность путем суммирования квадратов внутрисуточных доходностей, отобранных с очень короткими интервалами (высокие частоты). «Идея заключается в том, что если траектория выборки волатильно-

сти непрерывна, то увеличение частоты выборки дает произвольно точные оценки волатильности в любой данный момент времени” [20]. В реализованном подходе к волатильности, волатильность становится заметной, применимы традиционные модели временных рядов и возможно многомерное моделирование. В результате недавние исследования, по-видимому, благоприятствуют использованию высокочастотных финансовых данных при оценке и прогнозировании волатильности условной доходности. См., например, Мартенса [27], Мартенс и Зейн и др. [28]. Однако данные показывают, что традиционные модели GARCH были очень успешными на практике для прогнозирования волатильности условной доходности.

В этом исследовании мы прогнозируем и сравниваем волатильность основных индексов фондового рынка США с использованием моделей GARCH и высокочастотных оценок волатильности (реализованных показателей). Мы стремимся понять, какая модель или оценка волатильности дает более точный прогноз волатильности для рынка США на ближайшие 30 дней. Кроме того, мы исследуем частоту дискретизации и ширину окна, что приводит к более точному прогнозу волатильности.

Материалы и методы

Мы использовали ежедневные и внутридневные данные для S&P 500, сводного индекса Nasdaq (NASDAQCOMP) и индекса Dow Jones Industrial Average (DJIA) для прогнозирования волатильности фондового рынка США в течение следующих 30 дней (2021.10.16–2021.11.16). Для моделей GARCH мы использовали 396 рядов дневной доходности за период 2020.03.24–2021.10.15 для оценки и прогнозирования волатильности. Мы использовали различные оценочные выборки (ширина окна 22, 132, 264, 374 и 396 торговых дней) для оценки моделей GARCH. Это было сделано для того, чтобы мы могли исследовать выборку оценок (окно данных), которая приводит к более точному прогнозу волатильности.

В рамках реализованного подхода к волатильности мы использовали 1-минутную, 5-минутную, 10-минутную и 15-минутную ряда доходностей (166,530, 33,306, 16,653 и 11,102 внутридневных доходности соответственно) за период 2020–02–06–2021.10.15 для прогнозирования волатильности фондовых индексов. Исторические данные о ценах для рассматриваемых фондовых индексов были загружены с сайта Yahoo Finance и Finam.ru.

В качестве методов были использованы различные модели GARCH и высокочастотные оценки волатильности (реализованные показатели) для прогнозирования волатильности фондовых индексов. В подходе GARCH мы использовали модели GARCH [17, 18, 19, 22, 25, 29] со следующими характеристиками среднего, дисперсии и распределения:

- 1) Постоянное среднее значение + стандартный GARCH + нормальное распределение,
- 2) Постоянное среднее значение + стандартный GARCH + искаженное распределение t Стьюдента,
- 3) Постоянное среднее значение + экспоненциальный GARCH + искаженное распределение t Стьюдента,
- 4) Постоянное среднее значение + GJR GARCH + искаженное распределение студентов,
- 5) Постоянное среднее значение + асимметричная ДУГА мощности + искаженное распределение t Стьюдента,
- 6) Постоянное среднее значение + интегрированный GARCH + искаженное распределение t Стьюдента,
- 7) Постоянное среднее значение + стандартный компонент GARCH + искаженное распределение t Стьюдента,
- 8) AR (1) + GJR GARCH + искаженное распределение студентов t,
- 9) Среднее значение GARCH + GJR GARCH + искаженное распределение t студентов)
- 10) Постоянное среднее значение + стандартный GARCH + распределение t по Стьюденту,
- 11) Постоянное среднее значение + семейное распределение + распределение студентов t,
- 12) Постоянное среднее значение + стандартный GARCH + обобщенное распределение ошибок,
- 13) Постоянное среднее значение + стандартный GARCH + перекосящее обобщенное распределение ошибок,
- 14) Постоянное среднее значение + стандартный GARCH + нормальное обратное гауссово распределение,
- 15) Постоянное среднее значение + стандартный GARCH + Обобщенное гиперболическое распределение,
- 16) Постоянное среднее значение + стандартное распределение GARCH + SU Джонсона.

В рамках реализованного подхода к волатильности мы приняли следующие высокочастотные оценки волатильности для прогнозирования волатильности:

- 1) Реализованная дисперсия/Реализованная волатильность (rRVar): Эта оценка вычис-

ляет ежедневную Реализованную дисперсию [7]. Реализованная дисперсия или реализованная волатильность (RV) — это сумма квадратов внутридневной доходности.

2) Реализованные ковариации с помощью усреднения по подвыборке (rAVGCov): Оценщик rAVGCov вычисляет реализованные отклонения путем усреднения RV по частично перекрывающимся сеткам. Он был впервые представлен Чжаном и др. [30];

3) Модулированная реализованная ковариация (rMRCov): Модулированная реализованная ковариация вычисляет одномерную или многомерную предварительно усредненную оценку Хауча и Подольского [23].

4) Оценка ковариации в двухкратном масштабе (rTSCov): Она вычисляет матрицу ковариации в двухкратном масштабе, предложенную в Zhang et al. [31] и Чжан [30];

5) Надежная оценка ковариации в двух временных масштабах (rRTSCov): Она вычисляет надежную матрицу ковариации в двух временных масштабах, предложенную в Боудт и Чжан [13].;

6) Реализованный оценщик ядра (rKernelCov): Он вычисляет реализованную ковариацию с использованием оценки ядра [9]. Типы доступных ядер: Прямоугольное, Бартлетта, Второго порядка, Епанечникова, Кубическое, Пятое, Шестое, Седьмое, Восьмое, Парцен, Тьюки Хэннинг и модифицированное Тьюки Хэннинг. Для этого исследования мы использовали оценки ядра Епанечникова, Парцена и модифицированного ядра Туки Ханнинга;

7) Реализованная ковариация двух мощностей (rBPCov): Вычисляется реализованная ковариация двух мощностей (rBPCov), определенная в Барндорф-Нильсен и Шепард [13].

8) Минимальная реализованная дисперсия (rMinRV): Вычисляется rMinRVar, определенный в Андерсен и другие [8].

9) Медианная реализованная дисперсия (rMedRV): Она вычисляет rMedRVar, определенный в Андерсен и другие [8];

10) Пороговая ковариация (rThresholdCov): Вычисляется матрица пороговой ковариации, предложенная в Гобби и Манчини [26];

11) Ковариация Хаяси-Йошиды (rHYCov): Вычисляется оценка ковариации Хаяси-Йошиды [24];

12) Реализованная ковариация, взвешенная по дальности (rOWCov): Она вычисляет Реализованную ковариацию, взвешенную по дальности (rOWCov), определенную в Будт и др. [12].

13) Реализованная полуразность высокочастотного обратного ряда (rSV): Он вычисляет реализованные полуразности, определенные в Барндорф-Нильсен и др. [12]. В этом исследовании мы оценили как реализованную полувариантную обратную сторону, так и полувариантную обратную сторону;

14) Реализованная дисперсия на основе диапазона (RRV): Вычисляется оценка на основе реализованного диапазона, предложенная Кристенсенем и Подольским [15]. Для этой оценки мы выбрали $M_k=10$ и $\lambda=0,7$. M_k — длина блока, т.е. Количество высокочастотных возвратов в каждом неперекрывающемся блоке (K), а λ — коэффициент дисперсии. Обратите внимание, что $M_k=10$ и $\lambda=0,7$ для умеренно ликвидных активов;

15) Реализованная дисперсия на основе квантилей (QRV): Он вычисляет реализованную дисперсию на основе квантилей, разработанную Кристенсенем, Ооменом и Подольским [14]. Для этой оценки мы выбрали следующие гиперпараметры на основе рекомендаций, приведенных в Кристенсен и другие [6]: i) $M_k=40$, $\lambda=(0,9,0,93,0,95)$ и $\alpha=(0,3,0,3,0,4)$ ii) $M_k=20$, $\lambda=(0,8,0,85,0,9,0,95)$ и $\alpha=(0,1,0,2,0,3,0,3)$ где M_k — длина блока, λ — квантили доходности и α — вес квантиля. Это дало нам две оценки в рамках этого подхода — Квантильная реализованная дисперсия (QRV) и модифицированная квантильная реализованная дисперсия (mQRV). Для целей табличных презентаций мы сократили приведенные выше модели и методы волатильности следующим образом:

- Модели GARCH — GARCH1, GARCH2, GARCH3, GARCH4, GARCH5, GARCH6, GARCH7, GARCH8, GARCH9, GARCH10, GARCH11, GARCH12, GARCH13, GARCH14, GARCH15, GARCH16 соответственно

- Реализованные меры — RV, AV, MRC, TS, RTS, Epa, Par, mTH, BP, MiRV, MeRV, Thr, HY, OW, SV.do, SV.up, RRV, QRV, mQRV соответственно.

Мы приняли Гетерогенную авторегрессионную модель реализованной дисперсии (модель HAR-RV) Корси [16] для прогнозирования реализованной волатильности. Также был использован опыт анализа и прогнозирования финансовых данных, изложенных в работах [29, 30, 31].

Чтобы оценить качество прогноза волатильности, мы сравнили прогноз волатильности по моделям GARCH и высокочастотным оценкам волатильности с индексом волатильности CBOE (VIX) на следующие 30 дней (2021.10.16–2021.11.26). Модель/метод

волатильности с минимальной ошибкой прогноза по сравнению с VIX считается оптимальной моделью или оценкой. Индекс волатильности CBOE (VIX) является популярным показателем ожидаемой волатильности фондового рынка, основанным на опционах индекса S&P500. Он основан на ценах опционов на индекс SPX с ближайшими датами истечения срока действия и, таким образом, дает 30-дневный прогноз волатильности.

Результаты

В таблицах 1 и 2 ниже показано ожидаемое годовое изменение индекса SP500 в течение следующих 30 дней (2021.10.16–2021.11.26) в соответствии с моделями GARCH и оценками высокочастотной волатильности. Результаты в таблицах показывают, что для индекса SP500 GARCH15 (стандартная модель GARCH с постоянным средним и обобщенным гиперболическим распределением) и GARCH16 (стандартная модель GARCH с постоянным средним и распре-

делением SU Джонсона) превосходят все другие конкурирующие модели из семейства GARCH и реализованный подход к волатильности. Эти две модели GARCH имели минимальную ошибку прогноза (0,01%) по сравнению с индексом волатильности CBOE (VIX). Прогнозируемые потери этих моделей значительно меньше, чем у других оценок, основанных на двух подходах к волатильности. Однако следует отметить, что в то время как модель GARCH с обобщенным гиперболическим распределением постоянного среднего стандарта GARCH смещена вниз, модель GARCH с распределением SU постоянного среднего стандарта GARCH-Джонсона смещена вверх. Результаты в таблице 1 также показывают, что наилучшая выборка оценки (ширина окна) для прогнозирования волатильности индекса SP500 составляет 374 торговых дня.

Таблица 1. Ожидаемое изменение индекса SP500 в годовом исчислении в течение следующих 30 дней (2021.10.16–2021.11.26) – Модели GARCH

Volatility Estimators	Volatility forecast for the various window widths						Forecast error for the window widths				
	Forec W22	Forec W132	Forec W264	Forec W374	Forec W396	VIX	Loss W22	Loss W132	Loss W264	Loss W374	Loss W396
GARCH											
GARCH1	13.58	13.04	14.10	17.63	17.68	16.30	2.72	3.26	2.20	-1.33	-1.38
GARCH2	21.33	12.98	14.73	16.59	17.82	16.30	-5.03	3.32	1.57	-0.29	-1.52
GARCH3	14.28	9.52	12.70	14.99	16.12	16.30	2.02	6.78	3.60	1.31	0.18
GARCH4	22.44	12.10	14.80	16.22	18.08	16.30	-6.14	4.20	1.50	0.08	-1.78
GARCH5	15.80	11.53	15.37	17.55	16.20	16.30	0.50	4.77	0.93	-1.25	0.10
GARCH6	21.41	22.88	23.21	21.60	20.93	16.30	-5.11	-6.58	-6.91	-5.30	-4.63
GARCH7	15.34	13.10	14.24	14.46	18.52	16.30	0.96	3.20	2.06	1.84	-2.22
GARCH8	26.55	11.67	14.71	16.08	17.79	16.30	-10.25	4.63	1.59	0.22	-1.49
GARCH9	26.50	11.08	13.87	15.32	16.49	16.30	-10.20	5.22	2.43	0.98	-0.19
GARCH10	13.68	13.47	14.60	16.62	17.32	16.30	2.62	2.83	1.70	-0.32	-1.02
GARCH11	13.68	13.47	14.60	16.62	17.32	16.30	2.62	2.83	1.70	-0.32	-1.02
GARCH12	19.67	13.44	14.40	17.12	17.48	16.30	-3.37	2.86	1.90	-0.82	-1.18
GARCH13	17.89	13.02	14.67	17.16	17.96	16.30	-1.59	3.28	1.63	-0.86	-1.66
GARCH14	18.67	12.56	14.44	16.38	17.37	16.30	-2.37	3.74	1.86	-0.08	-1.07
GARCH15	27.17	15.28	14.57	16.31	17.48	16.30	-10.87	1.02	1.73	-0.01	-1.18
GARCH16	18.17	12.58	14.41	16.29	17.50	16.30	-1.87	3.72	1.89	0.01	-1.20

Примечание! i. W22, W132, W264, W374 и W394 – это ширина окна, используемая для прогнозирования волатильности ii. Мы использовали индекс волатильности CBOE (VIX) в качестве основы для сравнения iii. Выделенные ячейки указывают на модели GARCH, прогноз волатильности которых близок к прогнозу индекса волатильности CBOE (VIX)

Таблица 2. Ожидаемое изменение индекса SP500 в годовом исчислении в течение следующих 30 дней (2021.10.16–2021.11.26) — реализованный подход к волатильности

Volatility Estimators	Volatility forecast based on 1min, 5min, 10min & 15min sampling frequencies					Forecast error for the various sampling frequencies			
	Realized Measures	Forec 1min	Forec 5min	Forec 10min	Forec 15min	VIX	Forec Error 1min	Forec Error 5min	Forec Error 10min
RV	14.86	14.77	14.60	14.65	16.30	1.44	1.53	1.70	1.65
AV	20.45	11.31	10.02	10.99	16.30	-4.15	4.99	6.28	5.31
MRC	9.23	8.77	8.16	7.44	16.30	7.07	7.53	8.14	8.86
TS	10.27	10.08	9.64	9.43	16.30	6.03	6.22	6.66	6.87
RTS	9.07	9.08	8.80	8.63	16.30	7.23	7.22	7.50	7.67
Epa	15.22	14.49	14.51	14.45	16.30	1.08	1.81	1.79	1.85
Par	15.22	14.49	14.51	14.45	16.30	1.08	1.81	1.79	1.85
mTH	15.22	14.49	14.51	14.45	16.30	1.08	1.81	1.79	1.85
BP	9.95	11.00	11.44	11.23	16.30	6.35	5.30	4.86	5.07
MiRV	9.52	10.21	10.79	10.56	16.30	6.78	6.09	5.51	5.74
MeRV	9.36	10.07	10.53	10.35	16.30	6.94	6.23	5.77	5.95
Thr	8.62	9.62	9.88	9.89	16.30	7.68	6.68	6.42	6.41
HY	9.53	10.30	10.15	9.97	16.30	6.77	6.00	6.15	6.33
OW	7.95	8.78	8.63	8.65	16.30	8.35	7.52	7.67	7.65
SV.do	8.91	9.18	9.05	8.87	16.30	7.39	7.12	7.25	7.43
SV.up	11.46	11.28	11.09	10.98	16.30	4.84	5.02	5.21	5.32
RRV	11.61	12.37	12.47	10.83	16.30	4.69	3.93	3.83	5.47
QRV	8.67	9.61	12.07	7.84	16.30	7.63	6.69	4.23	8.46
mQRV	10.15	11.01	12.12	9.86	16.30	6.15	5.29	4.18	6.44

Обратите внимание! Выделенные ячейки указывают на реализованные меры, прогноз волатильности которых близок к прогнозу индекса волатильности CBOE (VIX)

Nasdaq Composite Index (NASDAQCOMP)

В таблицах 3 и 4 ниже обобщены ожидаемые годовые изменения индекса NASDAQ COMP в течение следующих 30 дней (2021.10.16–2021.11.26) на основе прогноза GARCH и высокочастотной волатильности. Результаты в таблицах 3 и 4 показывают, что 1-минутная оценка реализованной волатильности (RV-1 минута) является лучшей оценкой волатильности для индекса NASDAQCOMP. Эта оценка имела ошибку прогноза в 0,07% по сравнению с индексом

волатильности CBOE (VIX). Этот результат резко контрастирует с исследованиями, которые рекомендуют 5-минутную частоту выборки для оценки и прогнозирования волатильности в рамках подхода, основанного на реализованной волатильности. Таблицы также показывают, что ошибка прогноза модели GARCH8 (модель AR (1)-GJR GARCH с искаженным распределением t-Стюдента) в абсолютном выражении очень близка к ошибке оценки RV за 1 минуту (разница всего 0,1%).

Таблица 3. Ожидаемое изменение индекса NASDAQ COMP в годовом исчислении в течение следующих 30 дней (2021.10.16–2021.11.26) — модели GARCH

Volatility Estimators	Volatility forecast for the various window widths						Forecast error for the window widths				
	Forec W22	Forec W132	Forec W264	Forec W374	Forec W396	VIX	Loss W22	Loss W132	Loss W264	Loss W374	Loss W396
GARCH	15.53	14.82	17.59	18.91	19.10	16.30	0.77	1.48	-1.29	-2.61	-2.80
GARCH1	38.37	14.71	18.17	19.87	21.01	16.30	-22.07	1.59	-1.87	-3.57	-4.71
GARCH2	15.44	11.39	16.68	19.54	19.64	16.30	0.86	4.91	-0.38	-3.24	-3.34
GARCH3	31.20	13.34	16.49	18.17	20.74	16.30	-14.90	2.96	-0.19	-1.87	-4.44
GARCH4	42.75	15.73	19.51	21.65	19.65	16.30	-26.45	0.57	-3.21	-5.35	-3.35

Volatility Estimators	Volatility forecast for the various window widths						Forecast error for the window widths				
	Forec W22	Forec W132	Forec W264	Forec W374	Forec W396	VIX	Loss W22	Loss W132	Loss W264	Loss W374	Loss W396
GARCH6	38.66	19.50	22.66	22.56	22.81	16.30	-22.36	-3.20	-6.36	-6.26	-6.51
GARCH7	19.08	14.50	18.73	17.66	22.04	16.30	-2.78	1.80	-2.43	-1.36	-5.74
GARCH8	27.35	13.03	16.47	18.16	20.91	16.30	-11.05	3.27	-0.17	-1.86	-4.61
GARCH9	32.54	13.06	15.25	17.32	18.98	16.30	-16.24	3.24	1.05	-1.02	-2.68
GARCH10	15.40	13.22	18.02	19.52	20.23	16.30	0.90	3.08	-1.72	-3.22	-3.93
GARCH11	15.39	13.22	18.02	19.52	20.23	16.30	0.91	3.08	-1.72	-3.22	-3.93
GARCH12	15.34	14.44	17.74	19.00	19.27	16.30	0.96	1.86	-1.44	-2.70	-2.97
GARCH13	40.63	14.97	17.85	19.53	19.76	16.30	-24.33	1.33	-1.55	-3.23	-3.46
GARCH14	32.92	14.53	18.42	19.79	20.13	16.30	-16.62	1.77	-2.12	-3.49	-3.83
GARCH15	40.55	14.48	18.54	19.84	20.40	16.30	-24.25	1.82	-2.24	-3.54	-4.10
GARCH16	34.20	14.43	18.48	19.90	20.78	16.30	-17.90	1.87	-2.18	-3.60	-4.48

Примечание! i. W22, W132, W264, W374 и W394 – это ширина окна, используемая для прогнозирования волатильности ii. Мы использовали индекс волатильности CBOE (VIX) в качестве основы для сравнения iii. Выделенные ячейки указывают на модели GARCH, прогноз волатильности которых близок к прогнозу индекса волатильности CBOE (VIX)

Таблица 4. Ожидаемое изменение индекса NASDAQ COMP в годовом исчислении в течение следующих 30 дней (2021.10.16–2021.11.26) – реализованный подход к волатильности

Volatility Estimators	Volatility forecast based on 1min, 5min, 10min & 15min sampling frequencies					Forecast error for the various sampling frequencies			
	Realized Measures	Forec 1min	Forec 5min	Forec 10min	Forec 15min	VIX	Forec Error 1min	Forec Error 5min	Forec Error 10min
RV	16.23	16.81	17.20	17.05	16.30	0.07	-0.51	-0.90	-0.75
AV	22.66	13.09	12.19	11.72	16.30	-6.36	3.21	4.11	4.58
MRC	11.57	10.93	10.08	9.53	16.30	4.73	5.37	6.22	6.77
TS	12.36	12.31	12.08	11.83	16.30	3.94	3.99	4.22	4.47
RTS	10.93	11.06	11.00	10.81	16.30	5.37	5.24	5.30	5.49
Epa	16.97	16.98	17.03	17.05	16.30	-0.67	-0.68	-0.73	-0.75
Par	16.97	16.98	17.03	17.05	16.30	-0.67	-0.68	-0.73	-0.75
mTH	16.97	16.98	17.03	17.05	16.30	-0.67	-0.68	-0.73	-0.75
BP	11.13	12.90	13.93	13.75	16.30	5.17	3.40	2.37	2.55
MiRV	10.53	12.49	13.39	13.13	16.30	5.77	3.81	2.91	3.17
MeRV	10.40	12.17	12.84	12.79	16.30	5.90	4.13	3.46	3.51
Thr	9.68	11.35	11.88	12.02	16.30	6.62	4.95	4.42	4.28
HY	11.03	12.19	12.28	11.97	16.30	5.27	4.11	4.02	4.33
OW	8.77	10.71	10.62	10.69	16.30	7.53	5.59	5.68	5.61
SV.do	10.38	11.03	10.98	10.81	16.30	5.92	5.27	5.32	5.49
SV.up	12.16	12.56	12.90	12.64	16.30	4.14	3.74	3.40	3.66
RRV	13.46	14.22	15.08	13.38	16.30	2.84	2.08	1.22	2.92
QRV	10.37	11.14	14.51	10.06	16.30	5.93	5.16	1.79	6.24
mQRV	11.81	13.50	14.59	12.50	16.30	4.49	2.80	1.71	3.80

Обратите внимание! Выделенные ячейки указывают на реализованные меры, прогноз волатильности которых близок к прогнозу индекса волатильности CBOE (VIX)

Dow Jones Industrial Average (DJIA)

В таблицах 5 и 6 ниже приведены результаты прогноза волатильности индекса DJIA на ближайшие 30 дней (2021.10.16–2021.11.26).

Результаты в таблицах ясно показывают, что 5-минутная оценка RV является предпочтительной оценкой волатильности для индекса DJIA, поскольку она имела минимальную ошибку

прогноза (0,01%) из всех оценок волатильности в классе моделей GARCH и реализованного подхода к волатильности. Результаты в таблицах также подтверждают, что 5-минутная серия доходностей является оптимальной частотой выборки для оценки и прогнозирования волатильности индекса DJIA. После 5-минутной оценки RV следует GARCH 5 (модель асимметричной

ДУГИ мощности с постоянным средним и асимметричным распределением t Стьюдента). У него была ошибка прогноза 0,05%, однако это значительно больше, чем у 5-минутной оценки RV. Опять же, здесь было отмечено, что оптимальная выборка оценки (ширина окна) для прогнозирования волатильности индекса DJIA составляет 374 торговых дня.

Таблица 5. Ожидаемое изменение индекса DJIA в годовом исчислении в течение следующих 30 дней (2021.10.16–2021.11.26) – модели GARCH

Volatility Estimators	Volatility forecast for the various window widths						Forecast error for the window widths				
	Forec W22	Forec W132	Forec W264	Forec W374	Forec W396	VIX	Loss W22	Loss W132	Loss W264	Loss W374	Loss W396
GARCH											
GARCH1	13.40	11.84	14.04	18.05	19.86	16.30	2.90	4.46	2.26	-1.75	-3.56
GARCH2	17.99	12.66	14.79	17.59	19.00	16.30	-1.69	3.64	1.51	-1.29	-2.70
GARCH3	9.89	10.86	12.70	15.14	15.93	16.30	6.41	5.44	3.60	1.16	0.37
GARCH4	16.89	11.90	14.80	17.13	18.80	16.30	-0.59	4.40	1.50	-0.83	-2.50
GARCH5	21.69	17.65	15.69	16.25	17.38	16.30	-5.39	-1.35	0.61	0.05	-1.08
GARCH6	18.03	12.53	25.18	21.96	22.07	16.30	-1.73	3.77	-8.88	-5.66	-5.77
GARCH7	17.11	12.64	15.50	16.09	18.13	16.30	-0.81	3.66	0.80	0.21	-1.83
GARCH8	23.27	11.91	14.75	17.24	18.74	16.30	-6.97	4.39	1.55	-0.94	-2.44
GARCH9	18.46	11.69	14.93	16.67	17.56	16.30	-2.16	4.61	1.37	-0.37	-1.26
GARCH10	13.56	12.57	14.73	17.53	18.67	16.30	2.74	3.73	1.57	-1.23	-2.37
GARCH11	13.56	12.58	14.73	17.54	18.67	16.30	2.74	3.72	1.57	-1.24	-2.37
GARCH12	14.61	12.39	14.33	17.75	19.23	16.30	1.69	3.91	1.97	-1.45	-2.93
GARCH13	15.74	12.37	14.41	17.67	19.52	16.30	0.56	3.93	1.89	-1.37	-3.22
GARCH14	17.41	12.25	14.54	17.41	19.08	16.30	-1.11	4.05	1.76	-1.11	-2.78
GARCH15	18.51	12.43	14.55	17.38	19.01	16.30	-2.21	3.87	1.75	-1.08	-2.71
GARCH16	15.91	12.24	14.54	17.34	18.95	16.30	0.39	4.06	1.76	-1.04	-2.65
<p>Примечание! i. W22, W132, W264, W374, W394 являются шириной окна, используемой для прогнозирования волатильности ii. Мы использовали индекс волатильности CBOE (VIX) в качестве основы для сравнения iii. Выделенные ячейки указывают на модели GARCH, прогноз волатильности которых близок к прогнозу индекса волатильности CBOE (VIX)</p>											

Таблица 6. Ожидаемое изменение индекса DJIA в годовом исчислении в течение следующих 30 дней (2021.10.16–2021.11.26) – реализованный подход к волатильности

Volatility Estimators	Volatility forecast based on 1min, 5min, 10min & 15min sampling frequencies					Forecast error for the various sampling frequencies				
	Realized Measures	Forec 1min	Forec 5min	Forec 10min	Forec 15min	VIX	Forec Error 1min	Forec Error 5min	Forec Error 10min	Forec Error 15min
RV		16.64	16.29	15.31	15.57	16.30	-0.34	0.01	0.99	0.73
AV		23.24	12.37	10.58	10.27	16.30	-6.94	3.93	5.72	6.03
MRC		9.72	8.89	8.45	7.13	16.30	6.58	7.41	7.85	9.17
TS		10.95	10.70	10.07	9.86	16.30	5.35	5.60	6.23	6.44
RTS		9.70	9.41	9.00	8.99	16.30	6.60	6.89	7.30	7.31
Epa		16.51	14.83	15.43	15.14	16.30	-0.21	1.47	0.87	1.16
Par		16.51	14.83	15.43	15.14	16.30	-0.21	1.47	0.87	1.16
mTH		16.51	14.83	15.43	15.14	16.30	-0.21	1.47	0.87	1.16
BP		11.09	12.48	11.84	11.22	16.30	5.21	3.82	4.46	5.08

Volatility Estimators	Volatility forecast based on 1min, 5min, 10min & 15min sampling frequencies					Forecast error for the various sampling frequencies			
	Realized Measures	Forec 1min	Forec 5min	Forec 10min	Forec 15min	VIX	Forec Error 1min	Forec Error 5min	Forec Error 10min
MiRV	10.54	11.58	10.84	10.81	16.30	5.76	4.72	5.46	5.49
MeRV	10.65	11.21	10.61	10.62	16.30	5.65	5.09	5.69	5.68
Thr	9.61	10.27	9.67	9.83	16.30	6.69	6.03	6.63	6.47
HY	10.76	10.97	10.52	10.25	16.30	5.54	5.33	5.78	6.05
OW	8.29	8.77	9.02	8.55	16.30	8.01	7.53	7.28	7.75
SV.do	9.94	9.96	9.74	9.48	16.30	6.36	6.34	6.56	6.82
SV.up	12.64	12.40	11.45	11.54	16.30	3.66	3.90	4.85	4.76
RRV	13.08	13.78	13.07	11.29	16.30	3.22	2.52	3.23	5.01
QRV	10.03	12.94	12.73	8.01	16.30	6.27	3.36	3.57	8.29
mQRV	11.66	12.79	12.57	9.90	16.30	4.64	3.51	3.73	6.40

Примечание. Выделенные ячейки указывают на реализованные меры, прогноз волатильности которых близок к прогнозу индекса волатильности CBOE (VIX)

Заключение

Это исследование было направлено на то, чтобы понять, какая модель или оценка волатильности дает более точный прогноз волатильности фондового рынка США на ближайшие 30 дней. С этой целью мы спрогнозировали и сравнили волатильность основных индексов фондового рынка США, используя модели GARCH и высокочастотные оценки волатильности. Полученные результаты подтверждают, что:

1) для индекса SP500 стандартная модель GARCH с постоянным средним и обобщенным гиперболическим распределением и распределение SU Джонсона превосходят все другие конкурирующие модели из семейства GARCH и реализованный подход к волатильности. Эти две модели GARCH имели минимальную ошибку прогноза (0,01%) по сравнению с индексом волатильности CBOE (VIX). Результаты также показывают, что наилучшая выборка оценки (ширина окна) для прогнозирования волатильности индекса SP500 составляет 374 торговых дня.

2) 1-минутная оценка реализованной вола-

тильности (RV-1мин) является лучшей оценкой волатильности для индекса NASDAQCOMP. Эта оценка имела ошибку прогноза в 0,07% по сравнению с индексом волатильности CBOE (VIX).

3) 5-минутная оценка RV является предпочтительной оценкой волатильности для индекса DJIA. Он имел минимальную ошибку прогноза (0,01%) из всех оценок волатильности в классе моделей GARCH и реализованного подхода к волатильности. Результаты также подтвердили, что 5-минутная серия доходностей является оптимальной частотой выборки для оценки и прогнозирования волатильности индекса DJIA.

В свете этих результатов делается вывод, что как модели GARCH, так и высокочастотные оценки волатильности дают точный прогноз волатильности для фондового рынка США, однако высокочастотные оценки волатильности предпочтительнее для индексов NASDAQ Composite и Dow Jones Industrial Average, в то время как модели GARCH больше подходят для индекса S&P 500.

Библиографический список

1. Ait-Sahalia, Y., & Yu, J. (2008). High frequency market microstructure noise estimates and liquidity measures (No. w13825). National Bureau of Economic Research.
2. Andersen T.G., Teräsvirta T. (2009) Realized Volatility. In: Mikosch T., Kreiß JP., Davis R., Andersen T. (eds) Handbook of Financial Time Series. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71297-8_24
3. Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., & Labys, P. (2003). Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica*, 71(2), 579–625.
4. Andersen, T. G., Dobrev, D., & Schaumburg, E. (2012). Jump-robust volatility estimation using nearest neighbor truncation. *Journal of Econometrics*, 169(1), 75–93.
5. Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A., & Shephard, N. (2008). Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise. *Econometrica*, 76(6), 1481–1536.

6. Barndorff-Nielsen, O. E., Kinnebrock, S., & Shephard, N. (2010). Measuring downside risk: realised semivariance. In "Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honor of Robert F. Engle" (Edited by T. Bollerslev, J. Russell and M. Watson).
7. Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2004). Measuring the impact of jumps in multivariate price processes using bipower covariation. Discussion paper, Nuffield College, Oxford University.
8. Boudt, K., Croux, C., & Laurent, S. (2011). Outlyingness weighted covariation. *Journal of Financial Econometrics*, 9(4), 657–684.
9. Boudt, K., & Zhang, J. (2015). Jump robust two time scale covariance estimation and realized volatility budgets. *Quantitative Finance*, 15(6), 1041–1054.
10. Christensen, K., Oomen, R., & Podolskij, M. (2010). Realised quantile-based estimation of the integrated variance. *Journal of Econometrics*, 159(1), 74–98.
11. Christensen, K., & Podolskij, M. (2007). Realized range-based estimation of integrated variance. *Journal of Econometrics*, 141(2), 323–349.
12. Corsi, F. (2009). A simple approximate long-memory model of realized volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174–196.
13. Ding, Z., Granger, C. W., & Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of empirical finance*, 1(1), 83–106.
14. Engle, R. F., & Bollerslev, T. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric reviews*, 5(1), 1–50.
15. Engle, R. F., & White, H. (1999). Cointegration, causality, and forecasting: a Festschrift in Honour of Clive WJ Granger. Oxford University Press on Demand.
16. Fleming, J., Kirby, C., & Ostdiek, B. (2003). The economic value of volatility timing using "realized" volatility. *Journal of Financial Economics*, 67(3), 473–509.
17. Ghalanos A (2020). rugarch: Univariate GARCH models. R package version 1.4–4.
18. Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The journal of finance*, 48(5), 1779–1801.
19. Hautsch, N., & Podolskij, M. (2013). Preaveraging-based estimation of quadratic variation in the presence of noise and jumps: theory, implementation, and empirical evidence. *Journal of Business & Economic Statistics*, 31(2), 165–183.
20. Hayashi, T., & Yoshida, N. (2005). On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes. *Bernoulli*, 11(2), 359–379.
21. Hentschel, L. (1995). All in the family nesting symmetric and asymmetric garch models. *Journal of financial economics*, 39(1), 71–104.
22. Mancini, C., & Gobbi, F. (2012). Identifying the brownian covariation from the co-jumps given discrete observations. *Econometric Theory*, 28(2), 249–273.
23. Martens, M. (2002). Measuring and forecasting S&P 500 index-futures volatility using high-frequency data. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, 22(6), 497–518.
24. Martens, M., & Zein, J. (2004). Predicting financial volatility: High-frequency time-series forecasts vis-à-vis implied volatility. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, 24(11), 1005–1028.
25. Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 347–370.
26. Zhang, L. (2011). Estimating covariation: Epps effect, microstructure noise. *Journal of Econometrics*, 160(1), 33–47.
27. Zhang, L., Mykland, P. A., & Aït-Sahalia, Y. (2005). A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data. *Journal of the American Statistical Association*, 100(472), 1394–1411.
28. Zivot, E. (2005). Analysis of High Frequency Financial Data: Models, Methods and Software. Part II: Modeling and Forecasting Realized Variance Measures. Unpublished Manuscript available at <https://faculty.washington.edu/ezivot/realizedvariance.pdf>.
29. Zaytsev, A., Rodionov, D., Konnikov, E., Dmitriev, N., & Dubolazova, Y. (2021). Modeling changes in the enterprise information capital in the digital economy. *Journal of Open Innovation: Technology, Market, and Complexity*, 7(3), 166.
30. Zaytsev A. A. (2019). Formation of the state financial policy: Transformation of the classical concept in the time of digitalization. A series of sequels of the ACM International Conference.
31. Zaytsev A. A., Close R. S., Rakhmeeva I. I., Dmitriev N. D. (2021). Building a model of financial management of digital technologies in the fields of combinatorial effects